

ШИФР

а 58

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника КОТОВА ТАТЬЯНА АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения

лицей
Школа № 40 район Нижегородский город Нижний Новгород

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

41 чистовик

Дата проведения 19 января 2025 года

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР

a.58

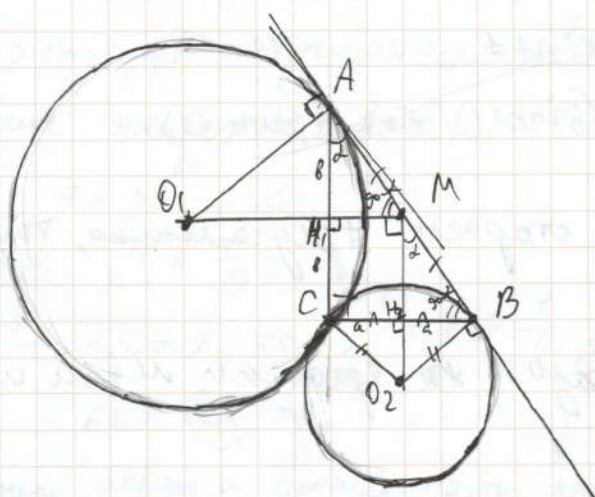
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
70	+	+	+	15
5	20	20	15	0

Заполняется проверяющим

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N2.


$$\Sigma = 60$$

Проведём в $\triangle O_2BC$ высоту $O_2K_2 \perp BC$. Пусть $O_2K_2 \cap AB = M'$.
 Поскольку $O_2C = O_2B$ (как радиусы окружности), то $\triangle CO_2B$ равноб.
 $\Rightarrow O_2K_2$ медиана, биссектриса $\Rightarrow CM_2 = K_2B$.

BC \perp AC (no year)

$$BC \perp O_2M_2 \text{ (по постро.)}$$

1. $O_2H_2 \parallel AC$

$OK_2K_4K_6 \mid \Rightarrow \text{т.е. } AM' = M'B \text{ (по т. Фалеса). Значит } M' \text{ середина } AB, \checkmark$
 $CK_2 \mid KB \mid \Rightarrow \text{т.е. } M' \text{ совпадает с } M.$

Аналогично ^{продолжение} высота $О_1Н_1$ в $\triangle O_1AC$ пересекает AB в $М$. Тогда

в четырёхугольнике H, M и K $\angle CH, M = 90^\circ$, $\angle H, CK = 90^\circ$,

$\angle MKL = 90^\circ \Rightarrow \angle K, MKL = 90^\circ \Rightarrow \triangle O, MKL$ прямоугольный. ✓

Пусть $AK_1 = K_1C = b$, $CK_2 = K_2B = a$. $\angle K_1K_2A \neq \angle K_1AM \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle AMK_1 = 90^\circ - \alpha, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{AM} \Rightarrow AM = \frac{b}{\cos \alpha}$$
$$B \subset O, AM: \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{AM}{O, M} \Rightarrow O, M = \frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

Аналогично $MB = \frac{a}{b} \text{ нд}$, $DM = \frac{a}{b} \text{ нд}$ cost.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin 2\alpha, \quad S_{O_1MO_2} = \frac{1}{2} \cdot O_1M \cdot O_2M = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{a}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \frac{ab \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\frac{ab}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 4\alpha$$

Ответ. $S_{ABC} : S_{O_1MO_2} = \sin^2 4\alpha$

№1. ~~$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$~~

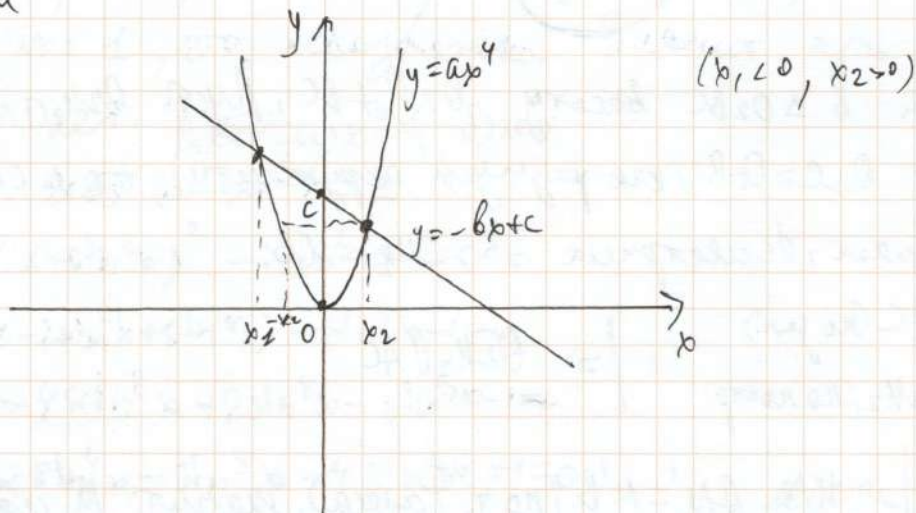
~~$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$~~

~~$2(1 - \sin x)^2 (1 + \sin x)^2 = (\sin x + 1)(\sin^2 x + \sin x + 1)$~~

№3. Поскольку a, b и c стороны треугольника, то $a, b, c > 0$

$$ax^4 + bx + c$$

$ax^4 = -bx + c$. Изобразим ~~на~~ графике левой и правой части



Поскольку $c > 0$, то прямая $y = -bx + c$ пересекает Oy в положительной полуплоси. $b > 0$, то $-bx + c$ имеет угол наклона \angle , $\text{tg} \angle < 0$, т.е. $y = -bx + c$ пересекает Ox в положительной полуплоси (как на рисунке). $y = ax^4$ имеет вид вытянутой параболы и направлена вверх, поскольку $a > 0$. Таким образом прямая $y = -bx + c$ пересекает $y = ax^4$ в двух точках, т.е. есть 2 решения уравнения. Поскольку $y = -bx + c$ убывает, то $y(x_1) > y(x_2)$. ~~Или наоборот~~

~~Доказано~~ $a x_1^4 > a x_2^4$

$x_1^4 > x_2^4$, т.е. $|x_1| > |x_2|$ ~~т.е.~~

Если x_1 и x_2 ~~оба~~ оба > 0 , то $y = -\log x$ имеет $\log x > 0$,
Если x_1 и x_2 оба < 0 , то $y = -\log x$ пересекает ось отрица-
тельной полуоси. Значит x_1 и x_2 разного знака,

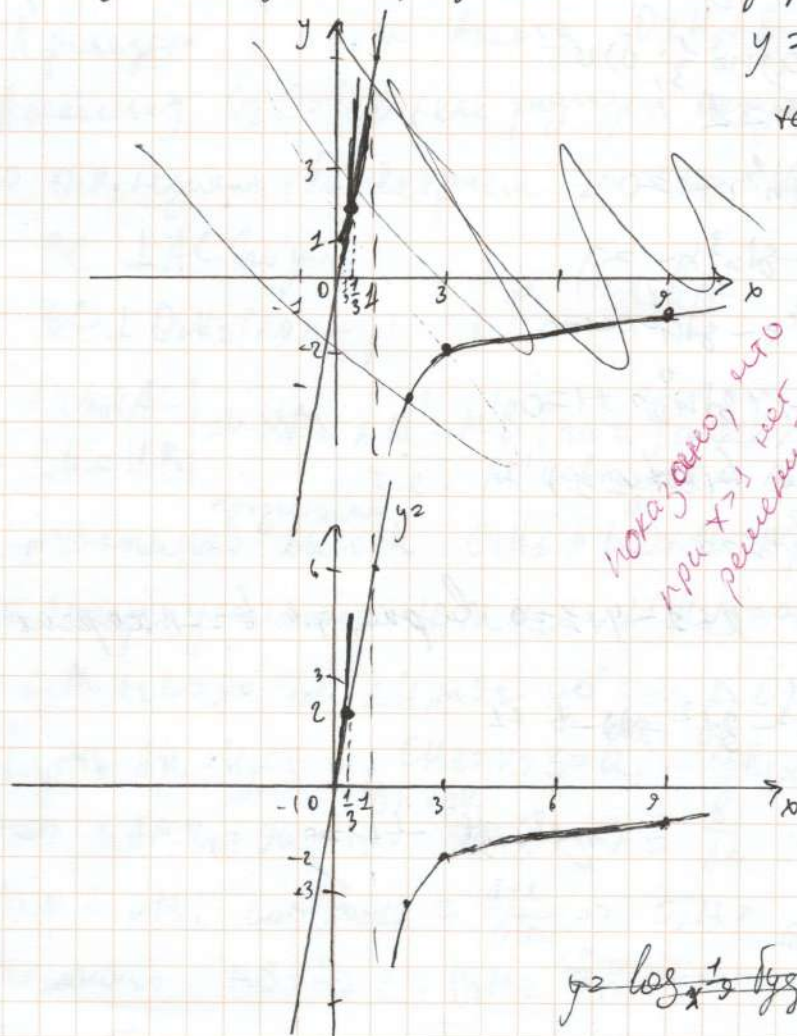
$|x_1| > |x_2|$, то отрицательной корень по модулю
больше положительного.

НЧ. а) $9 \cdot x^{6x} = 1$

~~Если~~ $x^{6x} = \frac{1}{9}$

Если $x = 1$, то $1^6 = 1 \neq \frac{1}{9}$, т.е. неверно. Для $x > 0$ и
 $x \neq 1$ $6x = \log_x \frac{1}{9}$.

Изобразим левую и правую части на графике



$y = \log_x \frac{1}{9}$ на $(0; 1)$ ^{тоже} ~~возрастает~~ ^{возрастает}, на $(1; +\infty)$ ~~возрастает~~.

Если $x > 1$, то $y < 0$
(т.к. $\frac{1}{9} < 1$, ~~чтобы~~ ^{так как} $x > 1$ возведи в отри-
цательную степень,
чтобы было больше
равенство)

$y = 6x$ принимает
отрицательные зна-
чения только
при $x < 0$, т.е.
 $y = 6x$ может пересечь
 $y = \log_x \frac{1}{9}$ только
при $0 < x < 1$.

При $x = \frac{1}{3}$ $y = 6x = 2$ и

$y = \log_x \frac{1}{9} = 2$, т.е. $x = \frac{1}{3}$

корень. ~~При $x = \frac{1}{3}$~~

$y = \log_x \frac{1}{9}$ будет выше $y = 6x$ (так как

покажем $y=bx$ и $y=\log_{\frac{1}{9}} x$ на $(0;1)$
 монотонны, те на этой отрезке y имеет только один корень

у монотонных функций
 может быть только одно
 решение

Таким образом, при $x > 0$ есть только 1 корень $x = \frac{1}{3}$.

б) при $x < 0$. Поскольку $1 > 0$, те $9 \cdot b^{bx} > 0$, т.е. $b^{bx} > 0$,

~~если~~ $x < 0 \Rightarrow bx = 2t$, где $t \in \mathbb{Z}$ и $t \neq 0$ (если $t=0$, то

$x=0$). Поскольку $b^x < 0$, то $|x| > 1$ (т.к. если меньше,

при возведении в степень будет получено $b^{bx} > 1$,

т.е. $9 \cdot b^{bx} > 9$ и $x \neq 1$). Тогда $x < -1$, $b^x < -b$.

$x^{bx} = \frac{1}{9}$. Поскольку $b^x \in \mathbb{Z}$, то x является целой

числа $\frac{1}{9}$. Пусть $x = -9^n$ ($|x| > 1$), где $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$(-9)^{n \cdot bx} = 9^{bnx} = \frac{1}{9^{-bnx}}$, поскольку $b^x < -b$, то

$-bx > 6$, $n \in \mathbb{N}$, то $-bnx > 6$, то при этом $\frac{1}{9^{-bnx}} = \frac{1}{9}$, т.е.

$-bnx = 1$, что невозможно. Значит при $x < 0$ кор-

ней нет. Ответ: а) $x = \frac{1}{3}$; б) нет

№1, $\cos^4 x - \sin^3 x = 1$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

Пусть $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

При $t = -1$ $2 + 1 - 4 + 1 = 0$ верно, т.е. $t = -1$ корень

$$\begin{array}{r} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 \quad | \quad t+1 \\ 2t^4 + 2t^3 \\ \hline -t^3 - 4t^2 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -t^3 - 4t^2 + 1 \\ -t^3 - 3t^2 \\ \hline -t^2 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -t^2 + 1 \\ -t^2 + 2t \\ \hline -2t + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2t + 1 \\ -2t + 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

(лист 2), продолжение №1)

$$f(t) = 2t^3 - 3t^2 - t + 1$$

$$f'(t) = 2 \cdot 3t^2 - 3 \cdot 2t - 1$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 1$$

$$6t^2 - 6t - 1 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 6 = 36 + 24 = 60 = 4 \cdot 15$$

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$t_2 = \frac{6 - \sqrt{60}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Поскольку $-1 \leq t \leq 1$, то $t_1 = 1 + \frac{\sqrt{15}}{3} > 1$ не подходит.

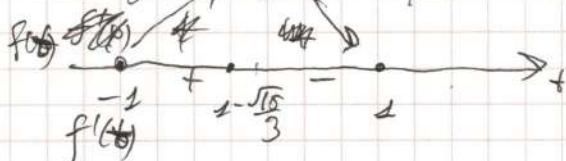
$$3 < \sqrt{15} < 4$$

$$1 < \frac{\sqrt{15}}{3} < \frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3} < -\frac{\sqrt{15}}{3} < -1$$

$$-\frac{1}{3} < 1 - \frac{\sqrt{15}}{3} < 0$$

$$\text{т.е. } t_2 \in [-1; 1]$$

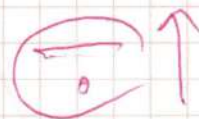


$$\text{При } f(-1) = -2 - 3 + 1 + 1 = -5 + 2 = -3 < 0$$

$$f(1) = 2 - 3 - 1 + 1 = -1 < 0$$

$$f\left(1 - \frac{\sqrt{15}}{3}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 - 1 + \frac{\sqrt{15}}{3} + 1 =$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{15}}{3}$$



Найдем только
основной корень,
но не найдем
корень уравнения
в $x = -1$

